MÉTODOS NUMÉRICOS

PROBLEMAS APLICADOS A LA INGENIERIA CIVIL

Semana 05

Sesión 2

EJERCICIOS EXPLICATIVOS

1. Se desea calcular a tirante en un escalón en un canal por medio de la aplicación de la ecuación de la energía especifica.
   Se tiene un flujo como se indica en la figura, del que se conoce el gasto (Q=0.5 m³/s) y la tirante de la sección 1 (y=0.15m), aguas arriba del escalón, en la sección 2. La altura del escalón es de 0.05m y el ancho del canal de sección rectangular es de 1.5m. Considerar una tolerancia de 0.0001. (usar m. de bisección)

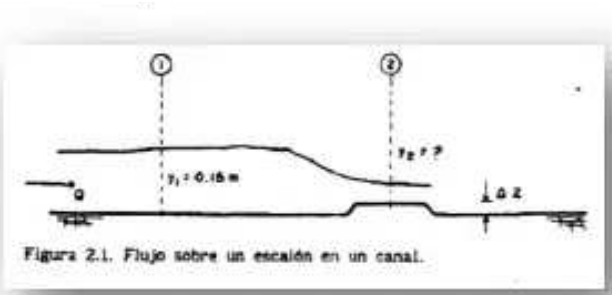

Figura 2.1. Flujo sobre un escalón en un canal.

2. Use el método de la regla falsa para el ejercicio anterior.

3. En ingeniería estructural, la fórmula de la secante define la fuerza por unidad de área P/A, que ocasiona la tensión máxima en una columna que tiene una razón de esbeltez L/K dada es:

$$\frac{P}{A}=\frac{\sigma_m}{1+\left(\frac{ec}{k^2}\right)\sec\left[0.5\sqrt{\frac{P}{EA}}\left(\frac{L}{K}\right)\right]}$$

   Donde:
ec/k²= razón de excentricidad, E= módulo de elasticidad en una viga de acero, para el ejercicio considerar E= 200000 MPa, ec/k²=0.4 y σ= 2. Calcule P/A para un L/K= 50. Recuerde que secx= 1/cosx. Considerar un error de 0.0055.

4. Calcular el tirante normal de un canal trapezoidal, para un gasto de Q=0.75 m³/s, que tiene un ancho de plantilla b=1.70m, talud k=2, pendiente de S= 0.0001 y coeficiente de rugosidad n=0.10. (use método de newton – raphson) . Considerar una tolerancia de 0.0001

5. Con los datos del ejercicio anterior halle la tirante critica del canal de sección trapezoidal (use método de la secante) . Considerar una tolerancia de 0.0001

SOLUCIÓN

1. **Usando método de bisección. -**

- Principio de la conservación de la energía entre ambas secciones.

$$E_1 = E_2 + \Delta Z.....(1)$$

- Energía especifica se define como:

$$E = y + \frac{v^2}{2g}.....(2)$$

- Gasto unitario:

$$q = \frac{Q}{b}.....(3)$$

- Energía específica para un canal de sección rectangular:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2}.....(4)$$

Reemplazando la ecuación (4) en lugar de E2 en la ecuación (1)

$$E_1 = y_2 + \frac{q^2}{2gy^2} + \Delta z$$

- Ecuación a emplear

$$y_2^3 + (\Delta z - E_1)y_2^2 + \frac{q^2}{2g} = 0$$

$$y_2^3 - 0.352y_2^2 + 0.00566 = 0$$

- Hallamos el gasto unitario:

$$q = \frac{Q}{b}$$

$$q = \frac{0.5}{1.5} = 0.333m^2/s$$

- La energía especifica de la sección 1:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \xrightarrow{entonces} E = 0.15 + \frac{0.333^2}{19.62 + 0.15^2} = 0.402m$$

- Para hallar el intervalo donde está la solución a la ecuación planteada se tiene en cuenta el tirante critico que existe en el canal.

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \xrightarrow{entonces} y_c = \sqrt[3]{\frac{0.333^2}{9.81}} = 0.224m$$

- Entonces el tirante buscado estará entre los valores:

$$0.15 < c < 0.224$$
$$a = 0.16$$
$$b = 0.224$$

Rpta. - Como se considera una tolerancia de 0.0001, en la tercera iteración se obtiene la solución y= 0.184

(ver tabla 1)

2. **Usando método de la regla falsa**

- Este método de la regla falsa o regula falsi, es similar al de bisección, aunque en lugar de utilizar un promedio aritmético de los límites del intervalo de búsqueda para evaluar la siguiente aproximación a la raíz, se emplea una relación de triángulos semejantes.

$$y_2^3 - 0.352y_2^2 + 0.00566 = 0$$

3. Método de la secante.

$$\frac{P}{A}=\frac{\sigma_m}{1+(\frac{ec}{k^2})\sec\left[0.5\sqrt{\frac{P}{EA}}(\frac{L}{K})\right]}$$

$$\frac{P}{A}=\frac{250}{1+(0.4)\sec\left[0.5\sqrt{P/200000A}(50)\right]}$$

$$\frac{P}{A}=\frac{250}{1+(0.4)\left[1/\cos(0.5\sqrt{P/10000000A}\right]}$$

$$\frac{P}{A}=\frac{250}{1+(0.4/-0.607628314(P/A)}$$

$$\frac{P}{A}=\frac{-0.507628314P/A}{250(-0.607628314P/A+0.4}$$

$$\frac{P}{A}(-151.9070785P/A+100=-0.607628314P$$

$$f(\frac{P}{A})=-151.9070785(\frac{P}{A})^2+100.607628314\frac{P}{A}$$

- **Formula de la secante**

$$x_{i+1}=x_i-\left[\frac{f(x_i)(x_i-x_{i-1})}{f(x_{i-1})-f(x_i)}\right]\xrightarrow{donde}x_{i-1}=1,x_i=2$$

$$f(\frac{P}{A})=-151.9070785(\frac{P}{A})^2+100.607628314\frac{P}{A}$$

Rpta.- La fuerza por unidad de área que soporta la columna es de 38.60930523 MPa (ver tabla 3).

4. Método de Newton Raphson

- De la ecuación de Manning

$$V=\frac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2}.....(1)$$

Donde R es el radio hidráulico y V la velocidad media del flujo

- Ecuación de continuidad

$$V=\frac{Q}{A}.....(2)$$

- El radio hidráulico se define como

$$R=\frac{P}{A}.....(3)$$

Donde A= área hidráulica y P el perímetro mojado.

- Para un canal de sección trapezoidal se tiene que :

$$A=(b+ky)y.....(4.1)$$

$$P=b+2y\sqrt{1+k^2}..(4.2)$$

- Sustituyendo la ecuación 3 en 2 y ordenando:

$$\frac{Qn}{s^{1/2}}=\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}$$

- Es decir, la función a resolver es

$$f(y)=\frac{A^{5/3}}{P^{2/3}}-\frac{Qn}{S^{1/2}}=0.....(5)$$

- En la cual A y P son funciones del tirante "y". Para la aplicación del método de Newton- Raphson se requiere obtener la derivada de la función, que en este caso es:

$$f'(y)=A^{2/3}\left[\frac{5}{3}\frac{dA}{dy}-\frac{A}{P}\frac{dP}{dy}\right].....(6)$$

- Ordenando:

$$f'(y)=\frac{A^{2/3}}{P^{2/3}}\left[\frac{5}{3}\frac{dA}{dy}-\frac{A}{P}\frac{dP}{dy}\right].....(7)$$

- Por otra parte, las expresiones para el área hidráulica y perímetro mojado para una sección transversal trapecial resultan:

$$\frac{dP}{dy}=2\sqrt{1+k^2}.....(8.1)$$

Esta es la ecuación que debe resolverse para encontrar el tirante crítico.

Rpta .- El tirante crítico y= 0.2445

$$\frac{dP}{dy} = 2\sqrt{1+k^2} \quad \text{.....(8.1)}$$

$$\frac{dA}{dy} = b + 2ky \text{.....(8.2)}$$

- Se usará la ecuación recursiva para este método será:

$$y_{i+1} = y_1 - \frac{f(y)}{f'(y)}$$

Donde f(y) se calcula en la ecuación 5 y el f'(y) con las ecuaciones 7, 8.1 y 8.2.

- **Rpta .- La tirante normal**
  y= 0.9513742

5. Método de secante

- El tirante critico ocurre cuando el número de Froude es igual a la unidad, condición

  que puede escribirse como:

$$\frac{Q}{g\frac{A^3}{T}} = 1 \text{.....(1)}$$

  Donde T es el ancho de la superficie libre, que para un canal de sección trapecial está determinada por la ecuación:

$$T = b + 2ky \text{.....(2)}$$

- **La ecuación 1 se puede escribir en la siguiente forma:**

$$\frac{A^3}{Tg} - \frac{Q^2}{g} = 0$$

- **Sustituyendo las expresiones para A y T:**

$$f(y) = \frac{[(b+ky)y]^3}{b+2ky} - \frac{Q^2}{g} \text{.....(3)}$$

Tabla 1

Iteracion	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)
1	0.16	0.224	0.192	0.0007448	-0.00076253	-0.00023824

2	0.16	0.192	0.176	0.0007448	-0.00023824	0.000208224
3	0.176	0.192	0.184	0.00020822	-0.00023824	-2.780800E-05

Tabla 2

Iteración	a	b	c	f(c)
1	0.16	0.224	0.1946	-0.00029
2	0.16	0.1916	0.1842	-0.000325

Tabla3

x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	Error %
1	2	3.144459264	-51.2994502	-406.4130574	-1.185643505	-
2	3.14445926	7.928933118	-406.4130574	-1.185643505	-8.752380077	60.34
3.144459264	7.92893312	17.10026289	-1.185643505	-8.752380077	-42.700097	53.63
7.928933118	17.1002629	38.60930523	-8.752380077	-42.7000097	-	0.55